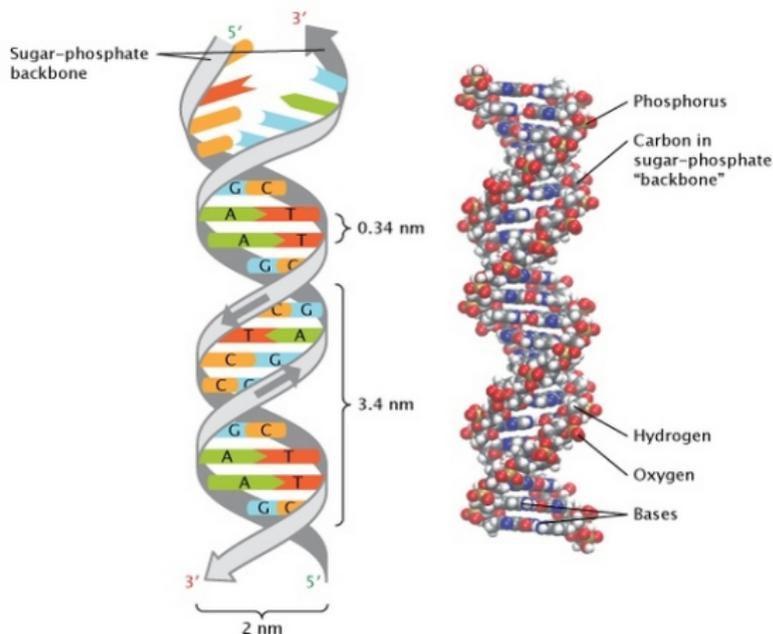


Fractals

Anna Carbone
Politecnico di Torino
www.polito.it/noiselab
Caffé Basaglia

November 2, 2016

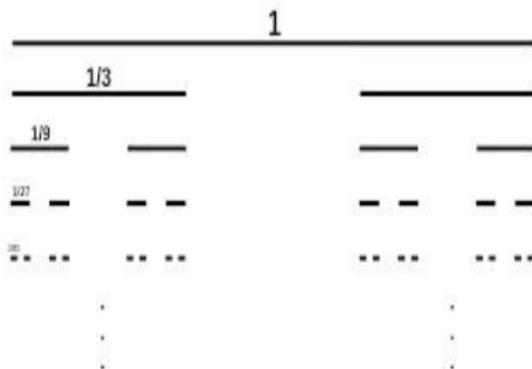
Fractals: Everywhere ever and ever (sempre e dovunque)



Fractals: Everywhere ever and ever (sempre e dovunque)



Middle Third Cantor Set



Auto-similarità: ogni parte é simile ma riscalata di un fattore $1/3$, $1/9$, $1/27$

Ricorsività: la struttura é ottenuta rimuovendo successivamente un terzo della parte centrale dei segmenti

Struttura fine: l'insieme presenta tale struttura dettagliata a scale arbitrariamente piccole.

Dimensione: la dimensione non è quantificata in termini di misure

Gli strumenti usuali della geometria euclidea non sono adatti per caratterizzare i frattali.

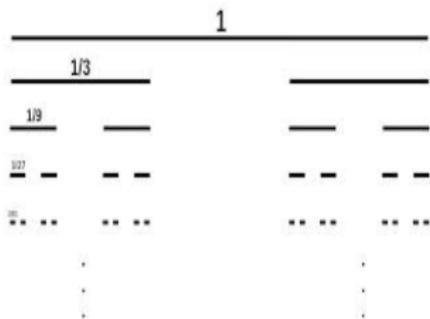
Un punto é un oggetto geometrico con dimensione 0.

Curve e linee sono oggetti con dimensione 1.

Una superficie é un oggetto con dimensione 2.

Dimensione Frattale

In generale un insieme fatto da m copie di se stesso scalate di un fattore r può essere pensato come caratterizzato da una dimensione $-\log m / \log r$.



L'insieme di Cantor può essere considerato ad ogni step come ottenuto da 2 copie di se stesso scalate di un fattore $1/3$.

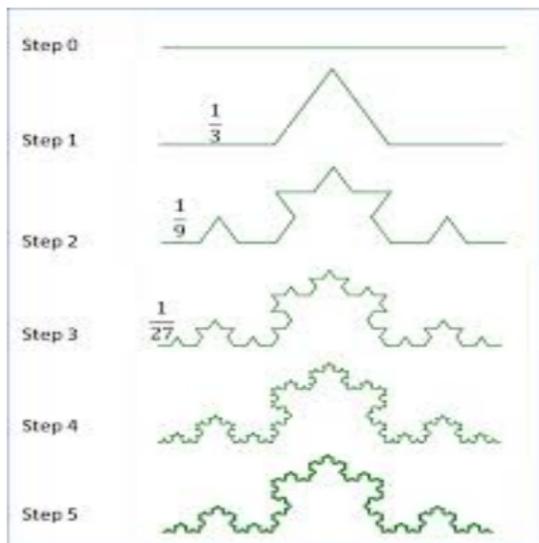
Quindi, l'insieme di Cantor ha dimensione

$$-\log 2 / \log 1/3 = \log 2 / \log 3 = 0.631, \\ D = 0.631 = 1 - H.$$

Tale dimensione è frazionaria con valore intermedio tra la dimensione di un punto (0) e quella di un segmento (1).

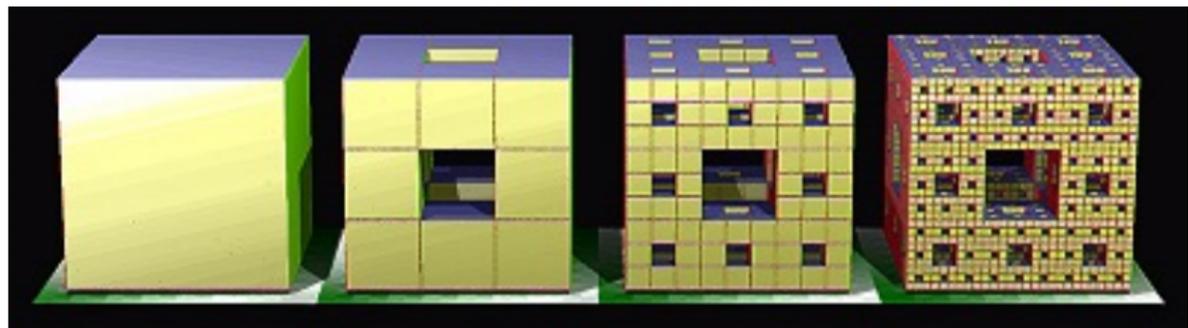
Curva di von Koch

Un oggetto ottenuto da m copie di se stesso scalate di un fattore r può essere pensato come caratterizzato da una dimensione $D = -\log m / \log r$.



La curva di von Koch ad ogni step é ottenuta da 4 copie di se stessa scalate di un fattore $1/3$. La curva di von Koch é un frattale con dimensione $D = -\log 4 / \log 1/3$
 $D = \log 4 / \log 3 = 1.262$
 $D = 1.262 = 2 - H$.
É un frattale invasivo.

Spugna di Menger

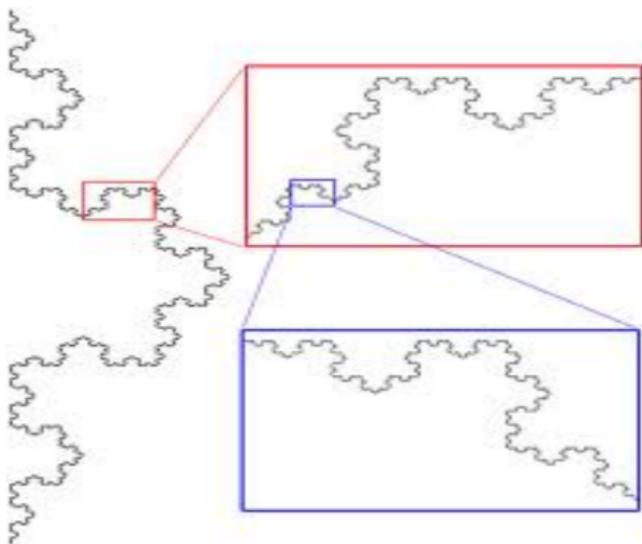


La spugna di Menger é un frattale con dimensione $D = 2.7268$

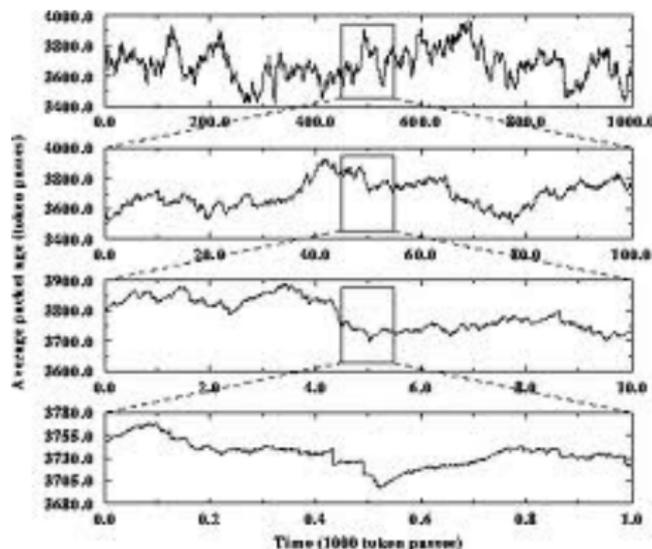
$$D = 3 - H.$$

É un frattale lacunare.

Auto-similarit  deterministic



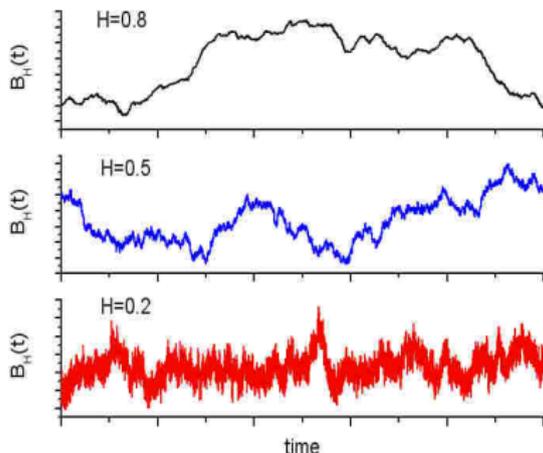
Autosimilarità statistica



Nella realtà, la somiglianza tra parti dello stesso oggetto potrebbe essere piú debole della stretta similarità geometrica. In questo caso la autosimilarità é detta "statistica".

Moto Browniano Frazionario

Si tratta di un oggetto frattale con dimensione $D = 2 - H$ cioè dimensione intermedia tra quella di una linea e una superficie.



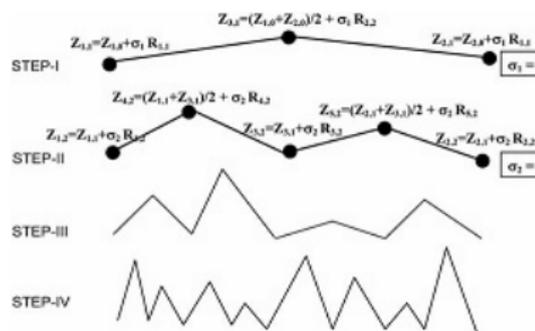
$H > 0.5$ correlazione positiva tra i segmenti (persistenza)

$H = 0.5$ nessuna correlazione tra i segmenti

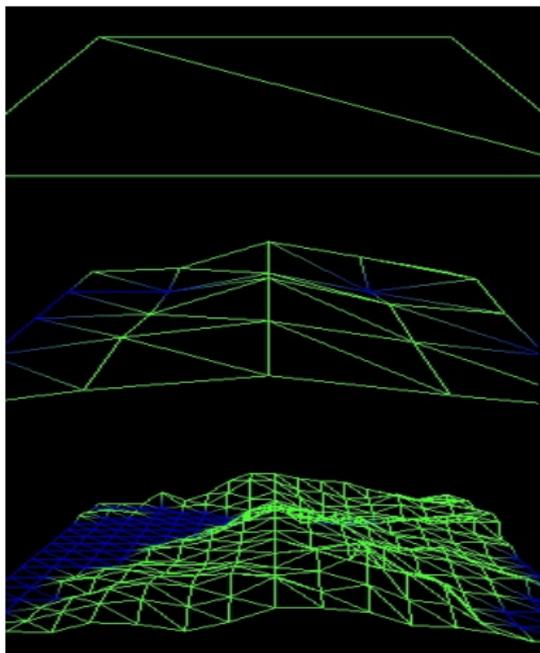
$H < 0.5$ correlazione negativa tra gli incrementi (anti-persistenza)

Random Midpoint Displacement

Il Random Midpoint Displacement (RMD) é un algoritmo che usa una tecnica ricorsiva per generare frattali con autosimilaritá statistica.



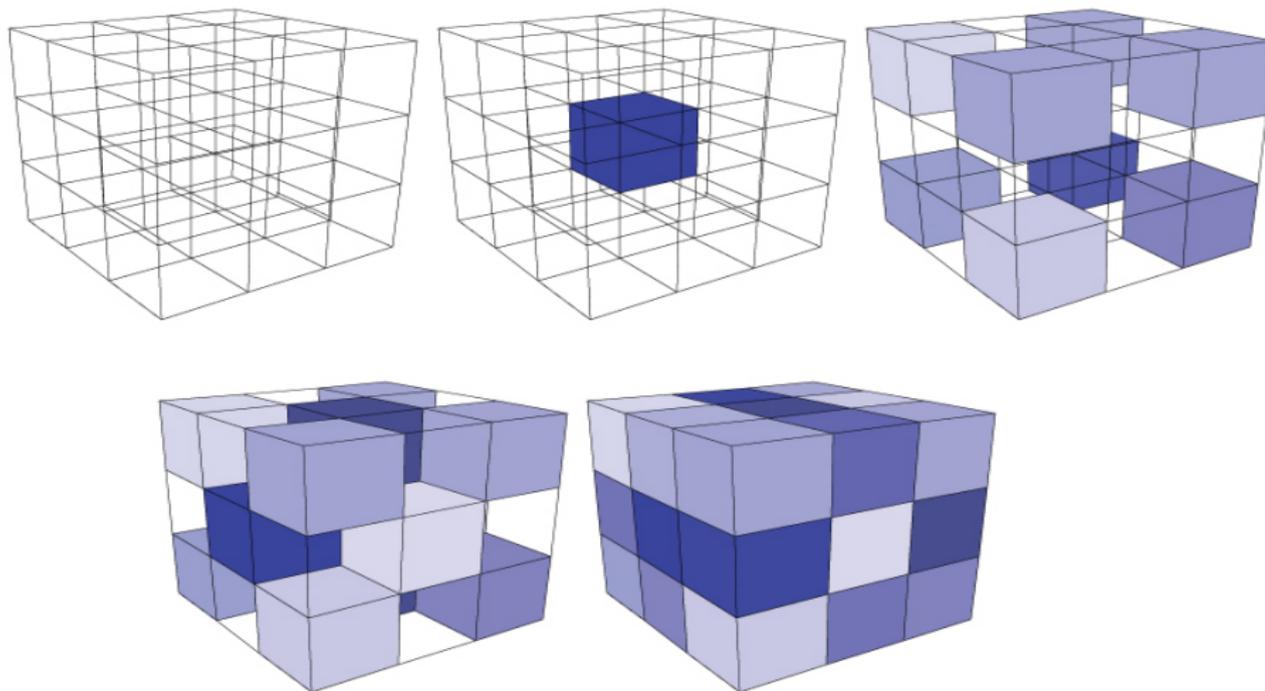
In $d = 1$, un moto Browniano frazionario é ottenuto partendo da un segmento di data lunghezza. Ad ogni iterazione j , il valore nel punto medio é calcolato come valor medio dei valori agli estremi piú un termine aggiuntivo che scala come l'inverso di un mezzo di segmento con esponente H che legato alla dimensione frattale $D = 2 - H$ che varia tra $D = 1$ e $D = 2$.



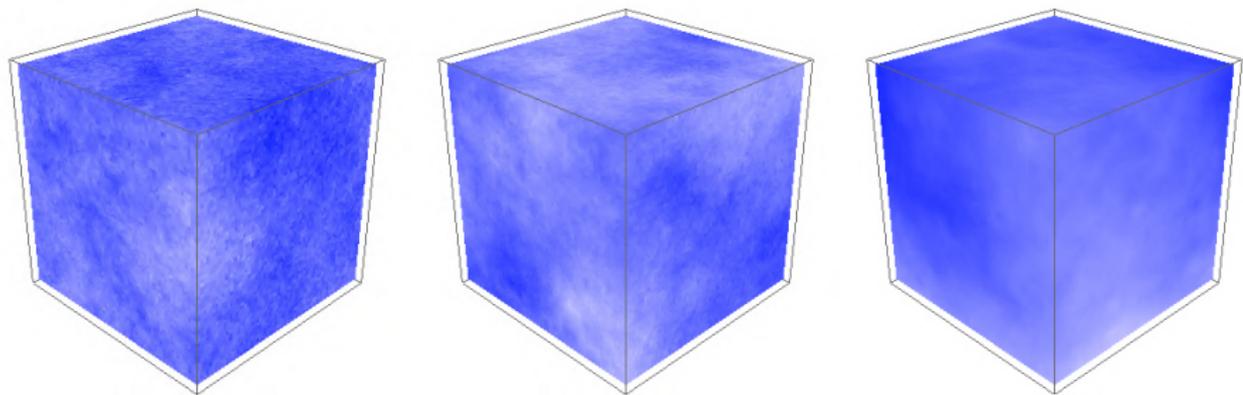
Si ottengono applicando ad una superficie 2D (invece che ad una linea) l'algoritmo di suddivisione del punto medio (Random midpoint displacement). Il quadrato é diviso prima in quattro quadrati.

Successivamente, il valore al centro del quadrato é calcolato come media dei valori ai quattro vertici piú un termine casuale aggiuntivo. Poi, i quattro valori del punto medio dei bordi sono ottenuti come media dei valori ai due vertici adiacenti piú un termine casuale. Il processo viene ripetuto fino ad ottenere la superficie frattale compatta con dimensione $D = 3 - H$.

Un frattale compatto 3D ?

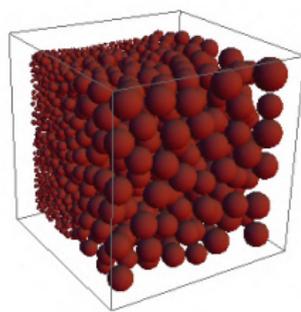
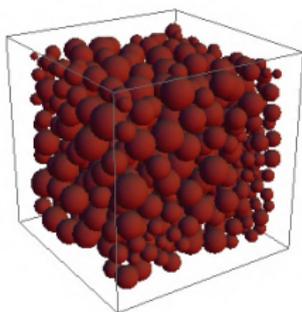
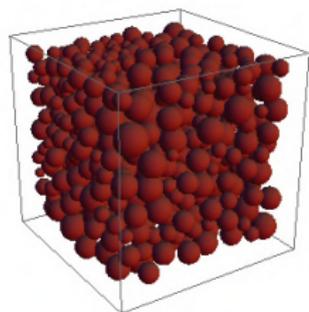


E dopo un certo numero di iterazioni l'algoritmo produce degli oggetti quasi "veri" ¹



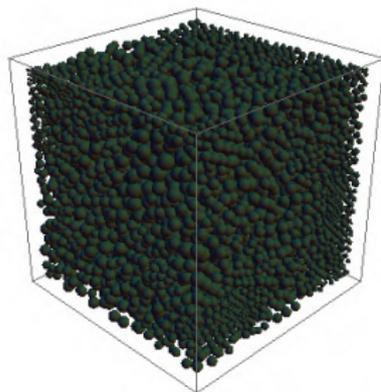
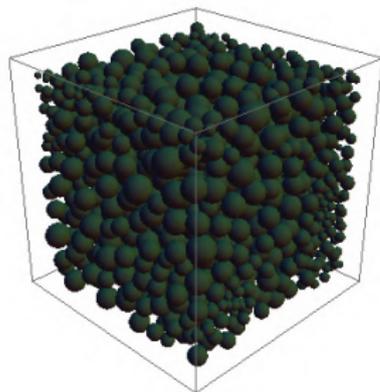
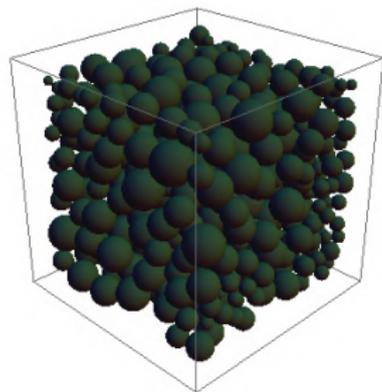
¹*Phys. Rev. E*, (2010), (2011a), (2011b), (2013)

Materiali granulari per tutti i gusti ²



²*Phys. Rev. E*, (2010), (2011a), (2011b), (2013)

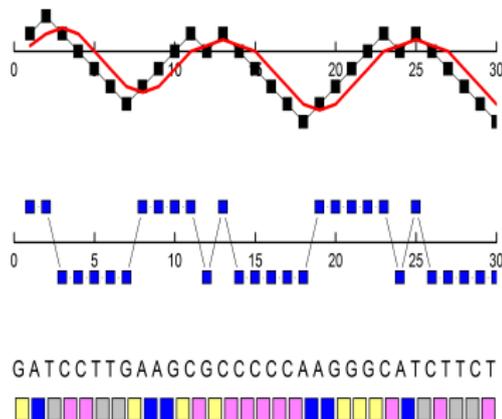
Materiali granulari per tutti i gusti ³



³*Phys. Rev. E*, (2010),(2011a),(2011b),(2013)



I 24 cromosomi umani ed altri genomi



- ▶ The sequence of the nucleotide bases ATGC is mapped to a numeric sequence.
- ▶ If the base is a purine (A,G) is mapped to +1, otherwise if the base is a pyrimidine (C,T) is mapped to -1.
- ▶ The sequence of +1 and -1 steps is summed and a random walk $y(x)$ is obtained.

